

# Cevap Anahtarı

## Modül Teorisi Dersi Bütünleme Soruları

1- Aşağıdaki kavramları açıklayınız.

Modül, Modül homomorfizması,  $M$  modülünün sıfırlayıcısı, Modül homomorfizmasının çekirdeği.

2-  $A$  ve  $B$  iki  $R$ -Modül olsun.

$$R \times (A \times B) \longrightarrow A \times B$$

$(r, (x, y)) \longrightarrow r \cdot (x, y) = (rx, ry)$  ile tanımlanan  $\cdot$  işlemiyle  $A \times B$  bir  $R$ -Modüldür, gösteriniz.

3-  $R$  bir halka ve  $f: A \longrightarrow B$  bir  $R$ -Modül homomorfizması olsun.  $A/\ker f \cong f(A)$  olduğunu gösteriniz.

4-  $f: A \longrightarrow B$   $R$ -Modül homomorfizması olsun.  $f(A) = B$  ve  $\ker f \leq A_1, A_2, A_1, A_2 \leq A$  ise  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  olduğunu gösteriniz.

1- Defterinizde var.

$$2- R \times (A \times B) \longrightarrow A \times B$$

$$(r, (x, y)) \longrightarrow r \cdot (x, y) = (rx, ry)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } r[(x, y) + (x_1, y_1)] &= r(x + x_1, y + y_1) = (r(x + x_1), r(y + y_1)) \\ &= (rx + rx_1, ry + ry_1) = (rx, ry) + (rx_1, ry_1) \\ &= r(x, y) + r(x_1, y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (r + r_1)(x, y) &= ((r + r_1)x, (r + r_1)y) = (rx + r_1x, ry + r_1y) \\ &= (rx, ry) + (r_1x, r_1y) = r(x, y) + r_1(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (r_1 r_2)(x, y) &= ((r_1 r_2)x, (r_1 r_2)y) = (r_1(r_2x), r_1(r_2y)) \\ &= r_1(r_2x, r_2y) = r_1(r_2(x, y)) \end{aligned}$$

3- Defterinizde var

4 -  $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ ,  $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$  ve buradan

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1), f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$$

$$\text{olup } f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \quad \times$$

$$x \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow x = f(a) = f(b),$$

$$\exists a \in A_1, b \in A_2 \text{ var } f(a) - f(b) = 0_N$$

$$a - b \in \ker f \subseteq A_1 \cap A_2, a - b = c, c \in \ker f$$

$$a, b \in A_1 \cap A_2, f(a) = f(b) = x \in f(A_1 \cap A_2)$$

bulunur.

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2) \quad \times \times$$